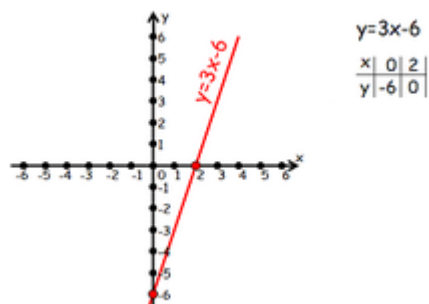
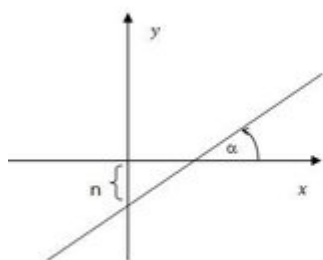


LINEARNA FUNKCIJA



Svaki skup uređenih parova (ili tačaka u ravni) se naziva **relacija** (ili **preslikavanje**). Relacija je takav skup tačaka koje su u nekom odnosu, ili imaju nešto zajedničko među sobom. Preslikavanja takođe imaju „**originale**“ i „**slike**„. Tipično, originali se označavaju sa **x** (i njihov skup nazivamo **domen** ili **oblast definisanosti**), a slike se označavaju sa **y** (i njihov skup nazivamo **kodomen** ili **oblast vrijednosti**). Za originalnu vrijednost kažemo i **nezavisna promjenljiva**, a za sliku **zavisna promjenljiva**. Da ponovimo, vrijednost y zavisi od vrijednosti x .

Funkcije su posebna vrsta relacija. **Funkcija** je preslikavanje u kome postoji tačno jedna slika za svaki original. Relacija ne može biti funkcija ako postoji jedan original za koji postoji više slika. Jednostavno rečeno: ako se ponovi vrijednost x , onda i vrijednost y mora biti ista. Matematički zapisano:

$$x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2$$

Kada je funkcija prikazana jednačinom, umjesto y se ponekad piše **f(x)** (čita se „f od x“).

Da se podsjetimo iz osnovne škole: linearna funkcija je preslikavanje koje ima oblik:

$$y = kx + n$$

Brojevi **k** i **n** se nazivaju **parametri**, jer je njihova vrijednost data, a vrednosti **x** i **y** se nazivaju **promjenljive**, jer njihove vrijednosti možemo birati tj. mijenjati.

Ovaj oblik linearne funkcije se naziva **eksplicitni**. Pored eksplicitnog postoji i **implicitni** oblik linearne funkcije:

$$Ax + By + C = 0$$

Primjer 1: Funkciju $-2x + 4y + 8 = 0$ prebaci u eksplicitni oblik.

Rješenje:

$$-2x + 4y + 8 = 0$$

$$4y = 2x - 8 \quad \text{Podijelimo sa 4.}$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

Primjer 2: Funkciju $y = \frac{1}{2}x + 4$ prebaci u implicitni oblik.

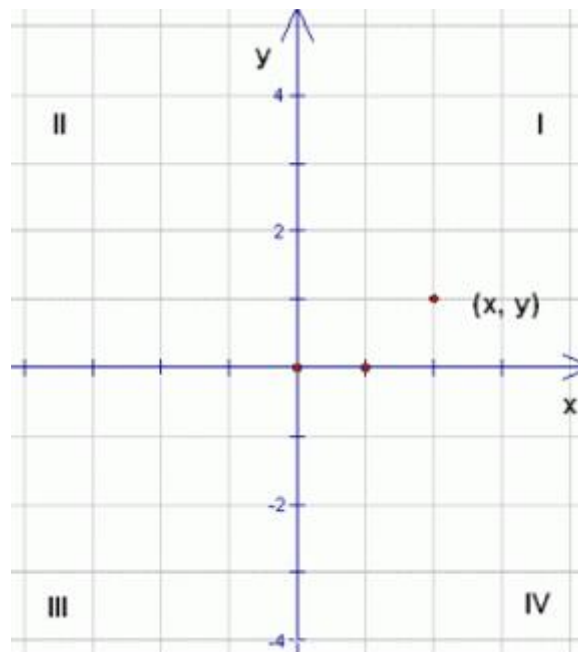
Rješenje:

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

$$\frac{1}{2}x - y + 4 = 0 \quad \text{Pomnožimo sa 2.}$$

$$x - 2y + 8 = 0$$

Sada da se podsjetimo šta je **koordinatni** ili **Dekartov sistem**:



Dakle, koordinatni sistem se sastoji od dvije međusobno normalne brojne ose koje se sijeku u svojim nulama, tj. koordinatnom početku. Horizontalna osa se označava sa x , a vertikalna sa y . Ove dvije ose dijele ravan na četiri **kvadranta** koji se označavaju rimskim brojevima u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu, počev od pozitivnog dijela osa. Svaka tačka je određena uređenim parom (x, y) kod koga je prvi broj koordinata ili položaj na x -osi, a drugi na y -osi. Ako je x negativno, tačka će ležati levo, u drugom ili trećem kvadrantu. Ako je y negativno, ležaće dole, u trećem ili četvrtom kvadrantu.

Na primjer, tačka $(9, -6)$ se nalazi u četvrtom kvadrantu.

Hajde sada da vidimo šta su parametri k i n ... Uzmimo, na primjer, linearnu funkciju

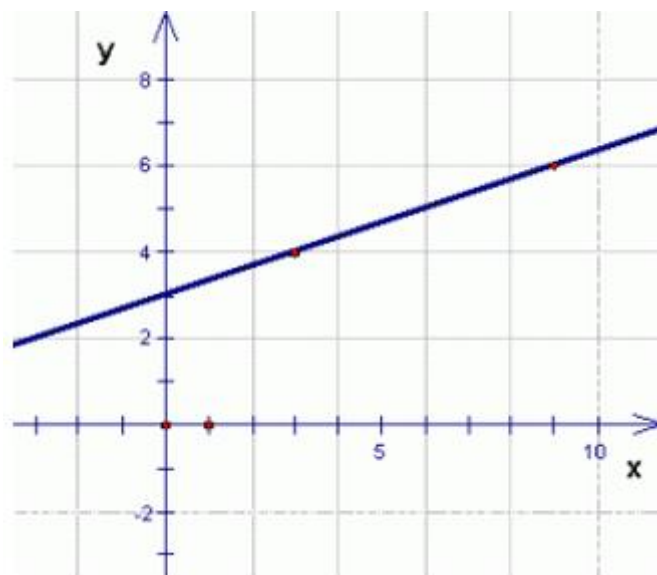
$$y = \frac{1}{3}x + 3$$

Njen **grafik**, tj. predstavljanje u koordinatnoj ravni **je prava linija**. Zato se i zove linearna. Pošto pravu određuju dvije tačke, možemo izabrati bilo koje dvije vrijednosti za x , izračunati y -vrijednosti, ucrtati ih u koordinatnoj ravni i spojiti ih. Time dobijamo grafik date linearne funkcije. Evo, na primjer, za x uzmimo 3 i 9 (pošto x množimo sa trećinom, zgodno nam je da bude djeljivo sa 3). Za y dobijamo:

$$y = \frac{1}{3} \cdot 3 + 3 = 1 + 3 = 4 \quad i \quad y = \frac{1}{3} \cdot 9 + 3 = 3 + 3 = 6$$

Time smo dobili dvije tačke: $(3,4)$ i $(9,6)$

koje možemo ucrtati u koordinatni sistem i spojiti:

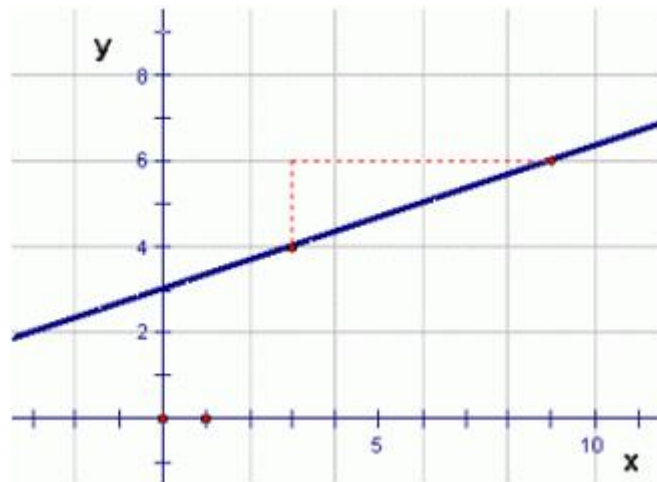


Vi već znate šta predstavlja parametar n – to ste učili. Da provjerimo: gdje prava na slici gore siječe y -osu? A koliko je n ? Da li je to uvijek tako? Zašto? Ako ne znate odgovor na ova pitanja, da pomognem... Prava će presjeći y -osu u nekoj tački. Njena x -koordinata mora biti 0. Kada u izrazu funkcije za x zamijenite 0, dobijate da je

$$y = k \cdot 0 + n = n$$

Dobro, dakle, n je parametar koji nam govori gdje će prava presjeći y -osu, tj. n je odsječak koji grafik funkcije pravi na y -osi. Šta je sa k ?

Ono što već znate je da k predstavlja nagib prave u odnosu na x -osu i zove se koeficijent pravca prave. Nagib, kao kod recimo puta se računa kao odnos koliko smo se popeli/spustili i koliko smo prešli. Da vidimo kako to ide za pravu. Uzećemo već postojeće dvije tačke na grafiku i zamislimo da se krećemo putem od jedne do druge. Označićemo koliko smo se popeli i koliko smo prešli:

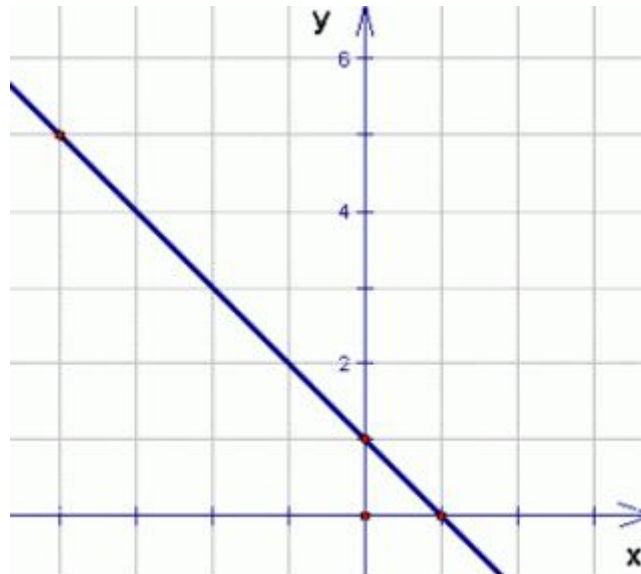


Sada izračunajmo odnos ta dva broja:

$$\frac{\text{gore}}{\text{desno}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Dobili smo k !

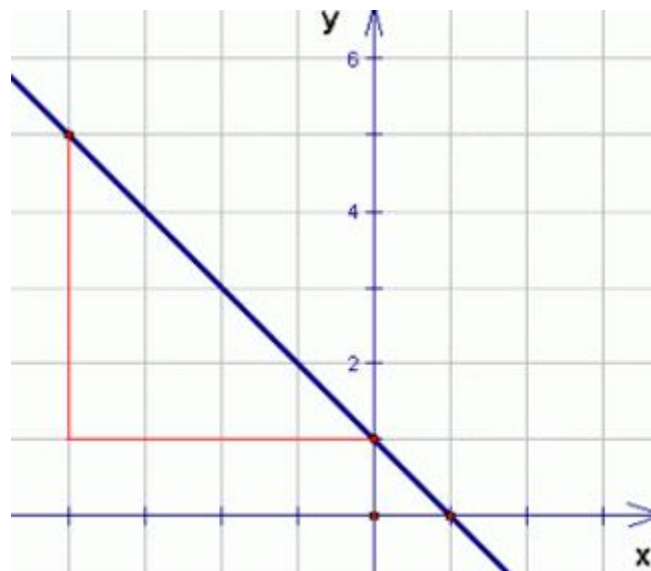
Primjer 3: Nađimo linearnu funkciju kojoj odgovara grafik na slici



Rješenje: Grafik siječe y-osu u 1, pa je

$$n = 1$$

Ovdje je nagib „nizbrdo“, pa crtamo:



Kada se spustimo za 4, prelazimo takođe 4, pa je

$$k = \frac{-4}{4} = -1$$

Na kraju, funkcija glasi:

$$y = -1 \cdot x + 1 = -x + 1$$

Iz ova dva primjera možemo zaključiti da kada je k pozitivno, prava će ići „uzbrdo“, tj. ugao koji zaklapa sa pozitivnim delom x -ose će biti oštar. Ako je k negativno, taj ugao će biti tup.

Primjer 4: Nagib grafika linearne funkcije je $1/2$ i prolazi kroz tačku $(4, -7)$. Koja je to funkcija?

Rješenje: Ovdje nam je dato $k = 1/2$ i jedna tačka na grafiku. Tačka pripada grafiku ako njene koordinate možemo da zamijenimo umjesto x i y i dobijemo tačnu jednakost. Znači, možemo zamijeniti sve u jednačinu $y = kx + n$

$$-7 = \frac{1}{2} \cdot 4 + n$$

$$-7 = 2 + n$$

$$n = -9$$

Pa je tražena linearna funkcija:

$$y = \frac{1}{2} \cdot x - 9$$

Kao što smo vidjeli, parametar k određuje pravac funkcije. Zbog toga ako dvije funkcije imaju isto k imaju i isti pravac, tačnije njihovi grafici će biti paralelni. To se vidi na sljedećoj slici.

$$y = 2x$$

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	0	2	4

$$y = 2x - 5$$

x	0	1	2	3	4
y	-5	-3	-1	1	3



Primjer 5: Odredi parametar a tako da grafik funkcije $y = (3a - 4)x + 5$ bude paralelan sa grafikom funkcije $y = 2x + 8$.

Rješenje: Ako su dva grafika paralelna znači da su njihovi koeficijenti jednaki : $k_1 = k_2$

$$3a - 4 = 2$$

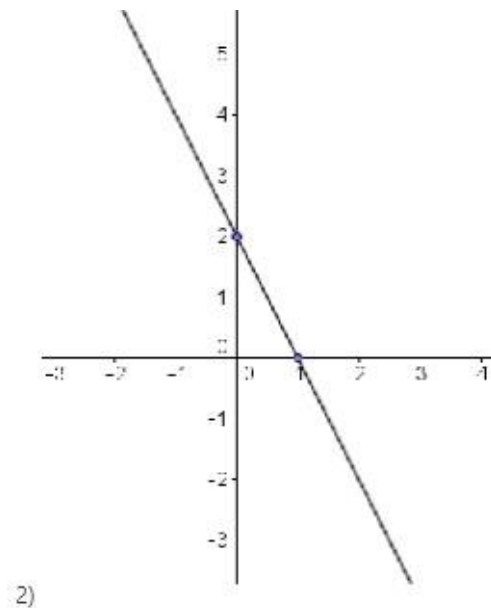
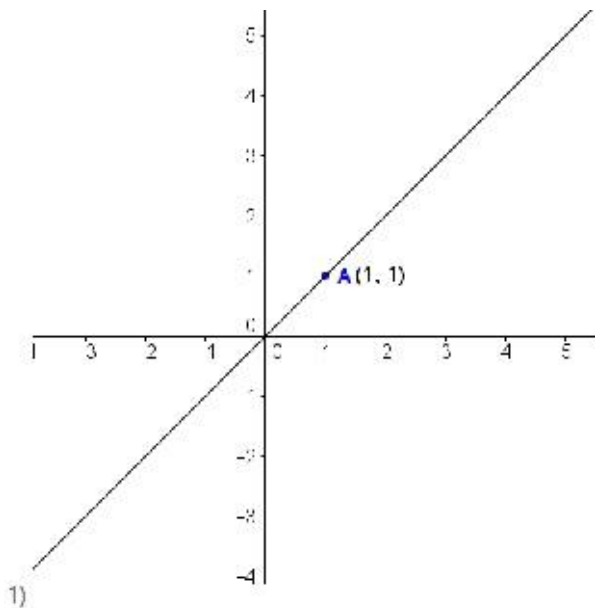
$$3a = 2 + 4$$

$$3a = 6$$

$$a = 2$$

Domaći zadatak!!!

1) Odredi funkcije čiji su grafici prikazani na slici:



2) Popuni tabelu i nacrtaj grafik funkcije

$$f(x) = 2x + 1$$

x	-3	-2	0	1	2
$f(x)$					

$$f(x) = 4 - 8x$$

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$					

3) a) Izrazi funkciju u implicitnom obliku : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$

b) Izrazi funkciju u eksplicitnom obliku: $-6x + 3y + 12 = 0$

4) Odredi parametar p tako da data funkcija $3y = px + 14$ sadrži tačku $P(2,4)$.

5) Odredi funkciju čiji je grafik paralelan pravoj $y = -2x + 5$ i sadrži tačku $A(-1,3)$.